数理解析研究所講究録
第 886 巻 1994 年 170-177

二次体の類数公式の細分化

秋山茂樹 (Shigeki Akiyama)
新潟大・教養

§1. Introduction

m を平方因子のない正の奇数として固定する。k を m と互いに素な正の整数で 4 の倍数であるとする。また $(\cdot/m)$ を Jacobi 記号とする。本稿で問題にするのは次のような和

$$S_m(k,i) = \sum_{(i-1)m/k<t<im/k} \left(\frac{t}{m}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

である。なお以下の議論は Jacobi 記号に限らず一般の Dirichlet 指標でできる事に注意しておく。なお k で議論できれば k の約数も当然取り扱えるので k が 4 の倍数であることはあとの議論のための便宜的な仮定である。なおこれ以降扱う Dirichlet 指標は全て原始的とする。

D を虚二次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-km})$ の判別式。$h_k=h(D)$ を K の類数。$\omega_k=\omega_D$ を K の 1 の巾根のなす群の位数。χ_Dを判別式 D の Kronecker 指標とする。$S_m(k,i)$ を用いて類数を計算しようという考え方は Dirichlet, Gauss までさかのぼる。例えば次の事が知られている。

Theorem (Dirichlet [3]) $m\equiv 1 \pmod 4$, $m>1$ とするとき

$$h(-4m) = 2\sum_{a=1}^{(m-1)/4}\left(\frac{a}{m}\right) = 2S_m(4,1) \tag{1}$$

これをよく知られた類数公式

$$h(-4m) = -\frac{1}{4m}\sum_{a=1}^{4m}\chi_{-4m}(a)a = \frac{1}{2}\sum_{0<a<2m}\chi_{-4m}(a)$$

と見比べると和の範囲がかなり狭くなっていることに気づく。もちろん計算を簡略化する事は今日のように計算機の発達した現代においてはあまり意味はないし、また類数を計算するだけならば基本領域のなかで二次形式を数え上げる方が早いであろう。

しかしこの (1) を定性的にみればどうだろう。この式から $h(-4m)$ が偶数なのがみてとれる。もちろんこれは種の理論から明らかであるが、もし一般の $S_m(k,i)$ たちにこのよう

な表現があるとすれば類数に関する有効な情報を引き出せるかもしれない。このいわば類数公式の細分化というべき仕事は Gauss [4] によって $S_m(8,i)$ および $S_m(12,i)$ の場合に拡張された。すなわち m が奇数のとき $S_m(8,1)$ を h_1 と h_2 で、また $(m,6)=1$ のとき $S_m(12,i)$ を h_1 と h_3 で書き下したのである。その一部分を書きだすと、

$m \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ のとき

$$\begin{aligned} S_m(8,1)=S_m(8,8) &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{m}\right)h_1+\frac{1}{4}h_2 \\ S_m(8,2)=S_m(8,7) &= \frac{1}{4}\left(2-\left(\frac{2}{m}\right)\right)h_1-\frac{1}{4}h_2 \\ S_m(12,1) &= \frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{3}{m}\right)\right)h_1+\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right)h_3 \end{aligned}$$

$m \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ のとき

$$S_m(12,1)=\frac{1}{4}\left(5-\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1-\frac{1}{4}h_3$$

等である。なお Gauss [4] p.301-303 の Dedekind による補注の中の式は間違いが散見される。これ以降の細分化の仕事であるが、論文を検索すると

- L. Rédei [6] により $m \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ のとき $S_m(10,i)$ を h_1, h_5 の一次結合
- B. Berndt [2] により $S_m(24,i)$ を h_1, h_2, h_3, h_6 の一次結合

に表したものなどが見つかる。ただ関連論文数はかなり多いので他の人の仕事を見落としている可能性がある。Berndt のものはもしかするともっと前に他の人によって見つかっているかもしれない。

また細分化の手法を利用して類数の詳しい情報を調べた仕事に [7], [8] 等がある。

本稿の目的はこの細分化の可能性に関する次の予想を述べ、現在までにわかった事を述べる事にある。

Conjecture 1

m が $\mathrm{mod} k$ の一つの剰余類を動くとき、m のとりかたと無関係な定数 a_ψ が存在して

$$S_m(k,i)=\sum_{\psi} a_\psi B_{1,\psi}$$

と書ける。ここで ψ は $\left(\frac{\cdot}{m}\right)\chi$ という形の odd な Dirichlet 指標で、χ の conductor f_χ が k の約数となるものの全体をわたる。ここで odd とは $\psi(-1)=-1$ となることであり、$B_{1,\chi}$ は first generalized Bernoulli 数である。なお a_ψ たちは $\mathbb{Q}$ に全ての χ の値を添加した代数体に値をもつ。

結果を述べる前にいくつか注意をしておく。ψ が odd Dirichlet 指標のとき、$\zeta=\zeta_{f_\psi}$ を 1 の原始 f_ψ 乗根とし、ガウス和を $G(\psi)=\sum_{a=0}^{f_\psi}\psi(a)\zeta^a$ と定義すると、$\overline{B_{1,\psi}}=B_{1,\bar{\psi}}$ の値

はよく知られているように Dirichlet の L 関数 $L(s,\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)n^{-s}$ の $s=1$ での値により

$$G(\bar{\psi})L(1,\psi)=-\pi\sqrt{-1}B_{1,\bar{\psi}}$$

と表される。従って Conjecture 1 は $S_m(k,i)$ を $L(1,\psi)$ たちの一次結合で表したものともみられる。

特に ψ が適当な虚二次体の Kronecker 指標 χ_D となっていれば

$$h(D)=-\frac{\omega_D}{2}B_{1,\chi_D}$$

であるので、予想の右辺の $B_{1,\psi}$ が全て類数で書ける場合には Gauss, Rédei, Berndt たちの示した結果の形になる。恐らく全てが類数で書ける場合はこれらで尽くされる。というのは ψ は少なくとも実指標でなければならないが、予想の右辺に表れる ψ が全て実指標であるためには k は 10 または 24 の約数でなければならないからである。ここで「恐らく」という理由は、もしかするとある k,i について $S_m(k,i)$ を $B_{1,\psi}$ の一次結合に書いたとき ψ が実でないときいつでも $a_\psi=0$ となっている可能性があるからである。なお Rédei の結果に $m\equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ という条件がつくのは $m\equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ の場合は ψ は実指標ではあるけれども虚二次体の Kronecker 指標にはならない場合だからであり Conjecture 1. はこの点もうまく説明できている。

Theorem 1
正整数 $L\leq 35$ があって k が $4L$ の約数であれば Conjecture 1 は正しい。

この結果は Gauss, Rédei, Berndt の全ての結果を含む。[2] では Berndt は $k=24$ の場合はごく一部の式しか実際には書いていないのでこの機会にその全公式を書き下しておく。

Corollary 1
$(m,6)=1$ のとき次が成立する。

$$\begin{aligned}
16S_m(24,1) &= \left(2\left(\frac{-6}{m}\right)-\left(\frac{-3}{m}\right)-7\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)+7\right)h_1+2\left(\left(\frac{-3}{m}\right)-1\right)h_2\\
&\quad+\left(2\left(\frac{-2}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)+1\right)h_3+2\left(\frac{-1}{m}\right)h_6\\
16S_m(24,2) &= \left(-4\left(\frac{-6}{m}\right)+2\left(\frac{-2}{m}\right)+5\left(\frac{-3}{m}\right)-\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{6}{m}\right)-4\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+5\right)h_1\\
&\quad+2\left(-\left(\frac{-3}{m}\right)+1\right)h_2+\left(3\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)-1\right)h_3-2\left(\frac{-1}{m}\right)h_6\\
8S_m(24,3) &= \left(\left(\frac{-6}{m}\right)+\left(\frac{-2}{m}\right)-2\left(\frac{-3}{m}\right)-\left(\frac{-1}{m}\right)-\left(\frac{6}{m}\right)+\left(\frac{2}{m}\right)-1\right)h_1\\
&\quad+2\left(\frac{-1}{m}\right)h_2+\left(-\left(\frac{-2}{m}\right)-2\left(\frac{-1}{m}\right)-\left(\frac{2}{m}\right)\right)h_3\\
8S_m(24,4) &= \left(2\left(\frac{-6}{m}\right)-4\left(\frac{-2}{m}\right)-2\left(\frac{-3}{m}\right)+3\left(\frac{-1}{m}\right)-2\left(\frac{6}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)+2\left(\frac{3}{m}\right)-3\right)h_1\\
&\quad-2\left(\frac{-1}{m}\right)h_2+\left(2\left(\left(\frac{-2}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)+\left(\frac{2}{m}\right)+1\right)\right)h_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
16S_m(24,5) &= \left(-2\left(\frac{-6}{m}\right)+4\left(\frac{-2}{m}\right)+3\left(\frac{-3}{m}\right)-3\left(\frac{-1}{m}\right)+4\left(\frac{6}{m}\right)-2\left(\frac{2}{m}\right)-3\left(\frac{3}{m}\right)+3\right)h_1\\
&\quad +2\left(-\left(\frac{-3}{m}\right)+1\right)h_2+\left(-6\left(\frac{-2}{m}\right)-5\left(\frac{-1}{m}\right)-4\left(\frac{2}{m}\right)-5\right)h_3+2\left(\frac{-1}{m}\right)h_6\\
16S_m(24,6) &= \left(-2\left(\frac{-6}{m}\right)-4\left(\frac{-2}{m}\right)+\left(\frac{-3}{m}\right)+7\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+1\right)h_1\\
&\quad +2\left(\left(\frac{-3}{m}\right)-1\right)h_2+\left(2\left(\frac{-2}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)+1\right)h_3-2\left(\frac{-1}{m}\right)h_6\\
16S_m(24,7) &= \left(2\left(\frac{-2}{m}\right)-\left(\frac{-3}{m}\right)-7\left(\frac{-1}{m}\right)-2\left(\frac{6}{m}\right)-4\left(\frac{2}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)-1\right)h_1\\
&\quad +2\left(\left(\frac{-1}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)\right)h_2+\left(\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)+1\right)h_3+2h_6\\
16S_m(24,8) &= \left(2\left(\frac{-2}{m}\right)+5\left(\frac{-3}{m}\right)-5\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{6}{m}\right)-5\left(\frac{3}{m}\right)+5\right)h_1\\
&\quad +2\left(-\left(\frac{-1}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)\right)h_2+\left(3\left(\frac{-1}{m}\right)-2\left(\frac{2}{m}\right)+3\right)h_3-2h_6\\
8S_m(24,9) &= \left(-2\left(\frac{-3}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)-2\left(\frac{2}{m}\right)+2\left(\frac{3}{m}\right)-1\right)h_1+2h_2-2\left(\left(\frac{-1}{m}\right)+1\right)h_3\\
8S_m(24,10) &= \left(-\left(\frac{-6}{m}\right)+\left(\frac{-2}{m}\right)+2\left(\frac{-3}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)+\left(\frac{6}{m}\right)+\left(\frac{2}{m}\right)+1\right)h_1\\
&\quad -2h_2+\left(-\left(\frac{-2}{m}\right)-2\left(\frac{-1}{m}\right)-\left(\frac{2}{m}\right)\right)h_3\\
16S_m(24,11) &= \left(2\left(\frac{-6}{m}\right)-4\left(\frac{-2}{m}\right)-5\left(\frac{-3}{m}\right)+\left(\frac{-1}{m}\right)-4\left(\frac{6}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)-5\right)h_1\\
&\quad +2\left(-\left(\frac{-1}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)\right)h_2+\left(2\left(\frac{-2}{m}\right)+3\left(\frac{-1}{m}\right)-1\right)h_3+2h_6\\
16S_m(24,12) &= \left(10\left(\frac{-2}{m}\right)+\left(\frac{-3}{m}\right)-9\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{6}{m}\right)-8\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+9\right)h_1\\
&\quad +2\left(\left(\frac{-1}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)\right)h_2+\left(\left(\frac{-1}{m}\right)+2\left(\frac{2}{m}\right)+1\right)h_3-2h_6
\end{aligned}
$$

なお $S_m(24,25-i)=(-1/m)S_m(24,i)$ によって残りの半分はすぐにわかる。

さて $S_m(k,i)$ $(i=1,2,\ldots k)$ たちは m が $\bmod k$ の一つの剰余類を動くとき m の値に関係なくいくつかの一次従属関係をもつ。例えば

$$\sum_{i=1}^{k} S_m(k,i)=0 \tag{2}$$

はこのような一次関係式である。このような関係式を $S_m(k,i)$ たちの普遍関係式と呼ぶ。このような普遍関係式全体

$$\sum_{i=1}^{k} b_{ij}S_m(k,i)=0 \quad (j=1,2,\ldots)$$

を考えたとき行列 $B=(b_{ij})$ の rank は本質的に異なる普遍関係式の個数を与えるわけである。これに関しては次が予想できる。

Conjecture 2

$$\operatorname{rank} B = k - \frac{\phi(k)}{2}$$

ここで $\phi(\cdot)$ はオイラー関数である。

実は Conjecture 2 を $\bmod k$ の一つの剰余類で確かめる事と、同じ剰余類で Conjecture 1 が成立する事が同値となる。Theorem 1 はこの Conjecture 2 を数値的に検証した結果得られたものである。したがって L の上限値は計算機と計算時間に依存したもので、あまり本質的なものではない。

ただ $\operatorname{rank} B$ が有限のアルゴリズムで計算可能なことは説明が必要である。実は次の事が示せる。

Theorem 2

$$\operatorname{rank} B \leq k - \frac{\phi(k)}{2}$$

この証明に関しては [1] 参照。従って一つの固定した $\bmod k$ の剰余類に関しては、その普遍関係式をたくさん与えておいてその rank が $k - \phi(k)/2$ に達すれば予想は証明できたことになる。さらに §2. をみればわかるようにこの方法は構成的なものなので Conjecture 2 がいえた時点で $S_m(k,i)$ を $B_{1,\psi}$ で表す方法も具体的に与えられるのである。

§2. Theorem 1. の証明の概略

詳細は [1] にゆずり、ここでは概略を述べておきたい。まず Dirichlet の式 (1) の証明をみる。

$$G(\chi, n) = \sum_{r=1}^{f_\chi} \chi(n) \zeta_{f_\chi}^{nr}$$

とおくと

$$G(\chi, n) = \bar{\chi}(n) G(\chi)$$

であることと

$$G\left(\left(\frac{\cdot}{m}\right)\right) = \sqrt{m} \qquad m \equiv 1 (\bmod 4)$$

を思い出しておく。

$$\begin{aligned} h(-4m) &= \frac{\sqrt{4m}}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_{-4m}(n)}{n} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_{-4}(n)}{n} \left(\frac{n}{m}\right) \sqrt{m} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_{-4}(n)}{n} \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{r}{m}\right) \zeta_m^{nr} \end{aligned}$$

となるのでこの両辺の実部をみれば

$$h(-4m)=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{r}{m}\right)\underline{\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi_{-4}(n)}{n}\cos(\frac{2\pi nr}{m})}$$

となるわけだがこの下線部は実は r に関して階段関数なのである。すなわち

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi_{-4}(n)}{n}\cos(2\pi nx)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad 0<x<1/4\\ -1 & \text{if}\quad 1/4<x<3/4\\ 1 & \text{if}\quad 3/4<x<1\end{cases}$$

という Fourier 展開ができる。これにより

$$2h(-4m)=S_m(4,1)-S_m(4,2)-S_m(4,3)+S_m(4,4)$$

を得る。さて $S_m(4,i)=S_m(4,5-i)$ および $\sum_{i=1}^{4}S_m(4,i)=0$ という普遍関係式によって

$$h(-4m)=S_m(4,1)+S_m(4,4)=2S_m(4,1)$$

となって証明は終わる。

この証明から学ぶべきは次の 2 点である。

(A) $\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n}\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(2\pi nx)$ はどのような場合に階段関数になるのか？

(B) $S_m(k,i)$ たちの普遍関係式はどれほどあるのか？

まず (A) については次が示せる。

Proposition 1. χ を Dirichlet 指標、f_χをその conductor とする。

χ が odd のとき

$$\frac{G(\bar{\chi})}{\sqrt{-1}\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n}\cos(2\pi nx)=-B_{1,\bar{\chi}}-\sum_{r=1}^{i-1}\bar{\chi}(r),$$

χが even のとき

$$\frac{G(\bar{\chi})}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n}\sin(2\pi nx)=\sum_{r=1}^{i-1}\bar{\chi}(r)$$

が $(i-1)/f_\chi<x<i/f_\chi$ で成り立つ。

この Proposition はガウス和の性質のみ用いて完全に初等的に示せる。Berndt は様々な手法を [2] で解説しているが、このように簡単な Proposition から出発しているものは見あたらない。ただ [2] で触れられている Y. Yamamoto の未発表の結果はこの部分と関連している可能性がある。この Proposition 1. から簡単に次が示せる。

Proposition 2. $\psi = (\cdot/m)\chi$ を odd Dirichler 指標とすると

$$B_{1,\psi} = \sum_{i=1}^{f_\chi} c_i S_m(f_\chi, i)$$

と書ける。ここで c_i は m が $\mathrm{mod}\, 4f_\chi$ の一つの剰余類を動くとき m の値に無関係に定まる。

ここで $\mathrm{mod}\, f_\chi$ でなく $\mathrm{mod}\, 4f_\chi$ をとらないといけない理由は odd と even に Proposition 1. の主張が分類されているためである。

この Proposition 2. を細分化の立場からみると m は固定されており f_χ が分割数 k である。従って ψ が odd となるような χ のとりかたは $\phi(k)/2$ 個ある。ここで Conjecture 2. をみると $S_m(k,i)$ たちにはちょうど $k-\phi(k)/2$ 個の本質的に異なる普遍関係式が存在するものと期待される。従いこれらをあわせた連立 1 次方程式系を解くことで $S_m(k,i)$ たちは $B_{1,\psi}$ の一次結合とかける事になる。その方程式系の係数行列は実際には $m \bmod k$ で定まるものと期待できる。なぜならまず $B_{1,\psi}$ のでてくる関係式の方は k が 4 の倍数ゆえに χの偶奇性が $m \bmod k$ で一定に定まっており c_i は $m \bmod k$ で決定する。以下に述べるように普遍関係式のほうも $m \bmod k$ できまるものと期待される。従ってそれらを解いた結果としてでてくる Conjecture 1. の係数 a_ψ たちも $m \bmod k$ で決まる事が期待できる。これで Conjecture 1. との関係も明らかになった。

次に (B) について述べよう。すでに述べた (2) や

$$S_m(k,i) = \left(\frac{-1}{m}\right) S_m(k, k+1-i) \tag{3}$$

は明らかに普遍関係式であるがそれ以外に次のようなものが知られている。t を k の約数とすると

$$\sum_{j=0}^{t-1} S_m(k, ti-j) = \left(\frac{t}{m}\right) \sum_{j=0}^{[(t-1)/2]} S_m(k, \frac{jk}{t}+i) + \left(\frac{-t}{m}\right) \sum_{j=1}^{[t/2]} S_m(k, \frac{jk}{t}-i+1) \tag{4}$$

が $i = 1, 2, \ldots, k/t$ で成立する。この関係は Johnson-Mitchell [5] によってはじめて明確に記述された。(なお [5] では m が素数の場合に限っている。) なおこの種の関係式の特別な場合は Gauss, Dedekind によって知られており、$k = 8, 12$ の場合の細分化に用いられている。(Gauss [4] の Dedekind による注を参照)

Conjecture 3. 普遍関係式 (2)(3)(4) を

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{b}_{ij} S_m(k,i) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

と書けば行列 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ について

$$\mathrm{rank}\, \tilde{B} = k - \frac{\phi(k)}{2}$$

が成立する。

すなわち本質的に異なる普遍関係式は上記の (2)(3)(4) で尽くされる。

なお、実際にどの $k-\phi(k)/2$ 個の普遍関係式が一次独立となるのかは、m が $\bmod k$ のどの剰余類に属するかによっても異なり、うまい法則性は見あたらない。しかしいずれにせよ普遍関係式の全体をどのように与えるかの実効的方法がこの Conjecture 3. で与えられた事になる。あとは計算機によって様々な場合に Conjecture を確かめていけば Theorem 1. は証明できることになった。

参考文献

[1] S. Akiyama, On sums of the Jacobi symbols., in preparation.

[2] B.C. Berndt, Classical theorems on quadratic residues, L'Enseign. Math. **22** (1976) 261-304.

[3] G.L. Dirichlet, Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimal à la théorie des nombres, Math. Werke 1 and 2, 414-496

[4] C.F. Gauss, Werke **2**, 286-303

[5] W. Johnson and K.J. Mitchell, Symmetries for sums of the Legendre symbol, Pacific Journal of Math. **69** no.1 (1977) 117-124

[6] L. Rédei, Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols, Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **13** (1950) 242-246

[7] K.S. Williams, On the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ modulo 16, for $p \equiv 1 (\bmod 8)$ a prime, Acta Arithmatica **39** (1981) 381-398.

[8] K.S. Williams and J.D. Currie, Class numbers and biquadratic reciprocity, Canadian Journal of Math. **34** no.4 (1982) 969-988